

FOGLIO DI ESERCIZI 7

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Trovare uno spazio topologico X e un sottoinsieme Y di X tale che Y è compatto ma la sua chiusura \overline{Y} non lo è.

Esercizio 2. Diremo che una famiglia di insiemi ha la *proprietà dell'intersezione finita* se ogni sottofamiglia finita ha intersezione non vuota. Dimostrare che uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni collezione di sottoinsiemi chiusi di X che ha la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Esercizio 3. Sia X un insieme non numerabile dotato della topologia cofinita. Dimostrare che X non è 1-numerabile.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico 1-numerabile e tale che ogni successione $\{x_n\}$ a valori in X converga ad al più un punto (cioè, tale che in X valga l'unicità del limite). Dimostrare che X è di Hausdorff.

Esercizio 5. *Topologie di partizione.*

Sia X un insieme e \mathcal{P} una partizione di X . Dimostrare che i sottoinsiemi $P \in \mathcal{P}$ di X e l'insieme vuoto formano una base per una topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ su X , che chiamiamo la topologia associata alla partizione \mathcal{P} .

- (1) Dimostrare che ogni aperto in $\tau_{\mathcal{P}}$ è anche chiuso, e dedurre che $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ non è uno spazio topologico connesso.
- (2) Dimostrare che la partizione banale $\mathcal{P} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ dà la topologia discreta, e che in ogni altro caso $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ non è T_0 .
- (3) Sia $X = \mathbb{N}$ con la partizione

$$\mathcal{P} := \{\{2k-1, 2k\} \mid k \geq 1\}.$$

Dimostrare che $(X, \tau_{\mathcal{P}})$ è 2-numerabile, separabile e Lindelöf, ma non compatto.

Esercizio 6. Un punto $p \in X$ si dice *di accumulazione* per la successione $\{a_n\}$ a valori in X se per ogni intorno U di p e per ogni $N \in \mathbb{N}$ esiste $n \geq N$ tale che $a_n \in U$. Dimostrare che se p è limite per $\{a_n\}$ allora p è di accumulazione, ma che non vale il viceversa.

Sia poi $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che definisca una biezione fra i numeri naturali e i numeri razionali, vista come successione $\{a_n\}$ a valori reali. Determinare i punti di accumulazione di $\{a_n\}$.

Esercizio 7. Dimostrare che il prodotto di due spazi separabili è separabile. È vero che ogni sottospazio di uno spazio separabile è separabile?

Esercizio 8. Uno spazio topologico si dice *localmente connesso* se ogni suo punto ammette un sistema fondamentale di intorni connessi. Dare un esempio di spazio localmente connesso che non sia connesso e uno di spazio connesso che non sia localmente connesso.